Control: Lec 2

Root locus

stability

Algebric methods

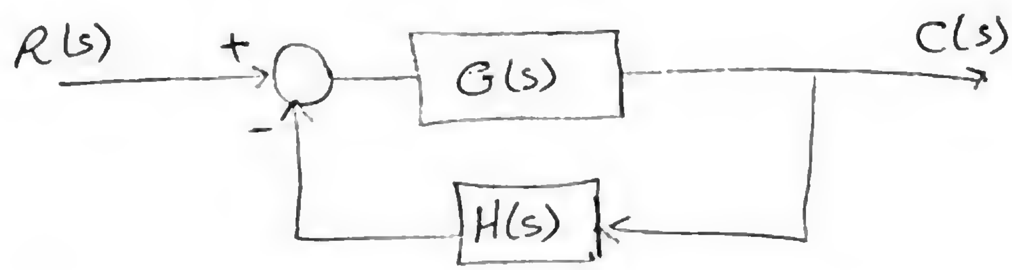
↳ Routh array

Graphical methods

* Root locus
* Bode diagram
* Polar plot

~~Root locus the locus of roots of ch. equation~~

~~(Poles)~~



C.L.T.F ≡ Closed loop transfer function $= \dfrac{G(s)}{1 + GH(s)}$

O.L.T.F $= GH(s)$

ch. eqn:- $\boxed{1 + GH(s) = 0}$

Root locus

The locus of the roots of ch.equation (Poles) that depend on variable Parameter (K) that takes Positive values $(0 \rightarrow \infty)$

EX: given $\text{O.L.T.F} = \dfrac{K}{s(s+1)}$

Sol

ch. eq

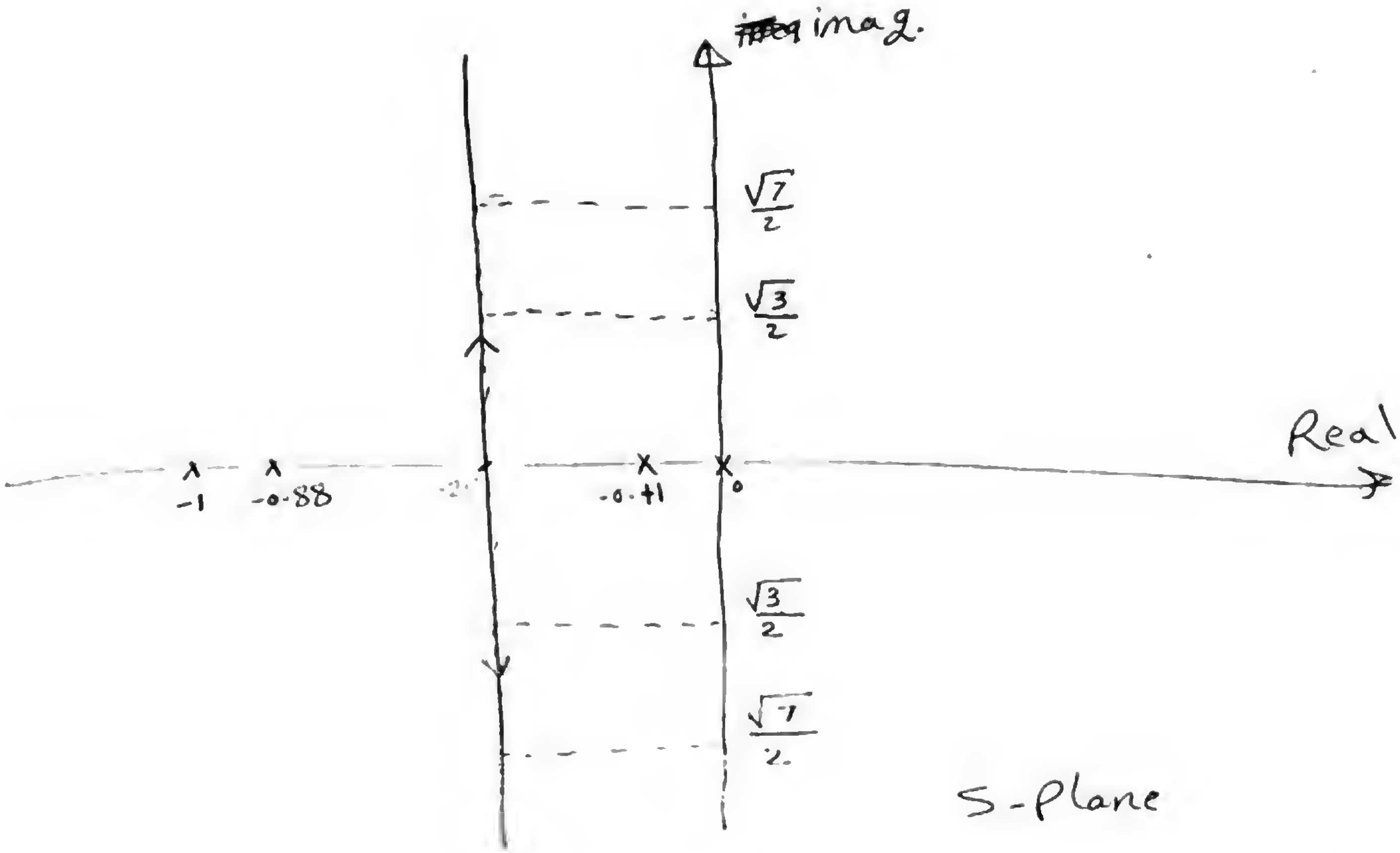
$$1 + G\,H(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{s(s+1)} = 0$$

$$s(s+1) + K = 0 \longrightarrow \boxed{s^2 + s + K = 0}$$ ch. eqn

K	0	0.1	0.25	1	2
$s_{1,2}$	$0, -1$	$-0.11, -0.08$	$\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2}$$



Ex: $$GH(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)}$$

* Draw the root locus and find the range of K that make the system stable.

Sol

① O.L Poles ⇒ 3 Poles (0, -3, -4)

O.L zeros ⇒ 1 zero -1

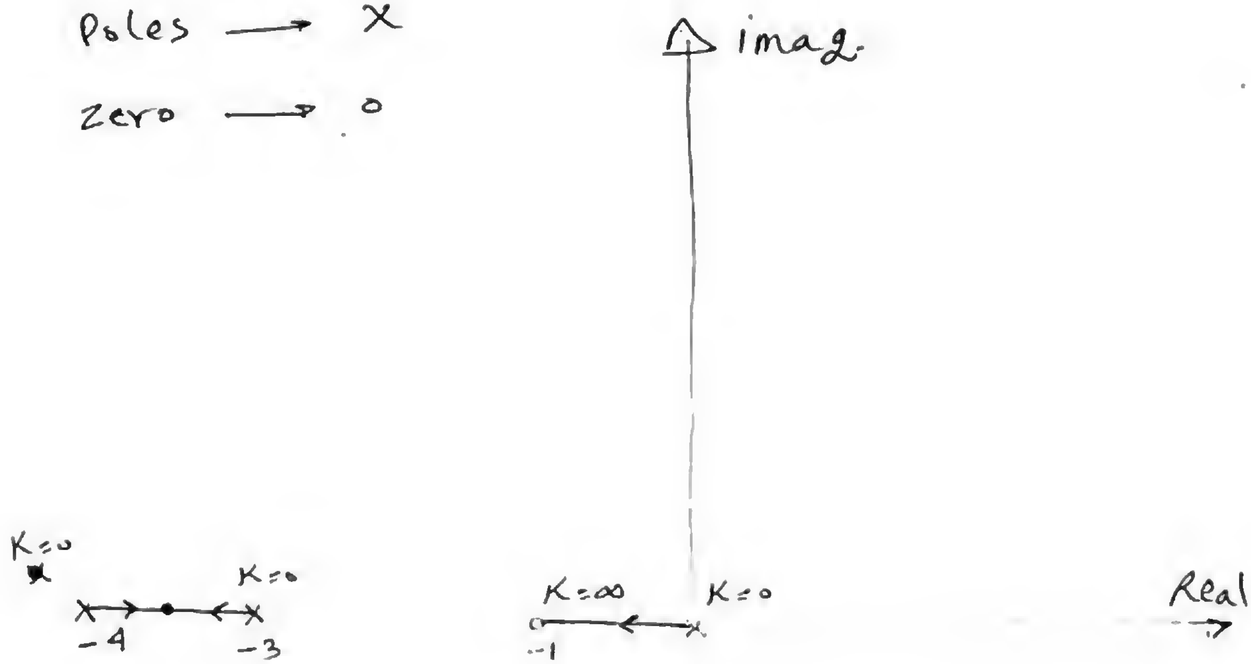
2

$\boxed{3}$ Lec 2

② s-plane

Poles $\longrightarrow$ x

zero $\longrightarrow$ o



ال (zero) ثابت دائماً
التغير في K يغير من (Poles)
كحالة الفترة من 0 ← -1
، -3 ← -4

← السهم من 0 ← -1 ، -3 ← -4 يمثل حركة ال (Pole)

end at Zero $\Rightarrow \overset{K=\infty}{o}$

Poles $\Rightarrow \overset{K=0}{X}$

← إحنا بنفترض إننا شغالين بال (open-loop) بس حقيقة هيا بالمثل ال (closed-loop) عند $K=0$

$$\frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)} \Rightarrow 1+\frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)} = s(s+3)(s+4) + K(s+1) = 0$$

③ Real Part :-

— هنا الفترة على ~~...~~ يمينك عدد ال Pole ، zero فردي
أو خليط منهم .

— في ال (s-plane) منطقة ال (Real-part)
تكون من 0 → -1 ، -3 → -4

Real Part → 0 → -1
→ -3 → -4

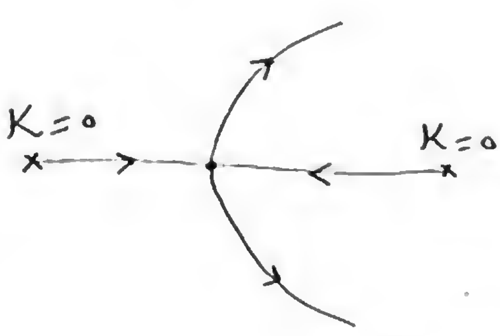
④ Breaking point :-

— نقطة تقع على ال (Real Part) , ال K عندها تكون أكبر ما يمكن
و أقل ما يمكن

Breaking point

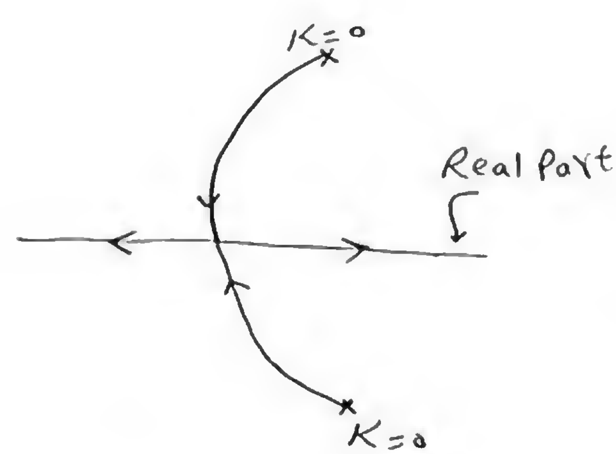
Break away point

K_{max}



Break in point
نقطة تلاق

K_{min}



③ Real Part :-

ـــ هيا الفترة على ~~...~~ يمينك عدد ال Pole ، zero فردى
أو خليط منهم.

ـــ في ال (s-plane) منطقة ال (Real-Part)

تكون من 0 ← -1 ، -3 ← -4

Real Part → 0 → -1
→ -3 → -4

④ Breaking Point :-

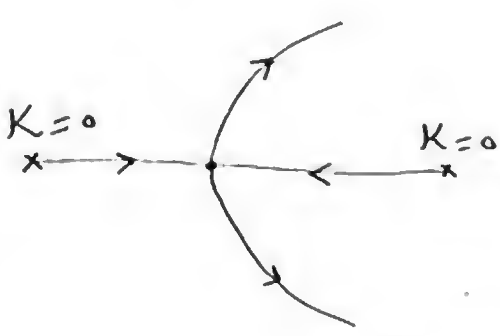
← نقطة تقع على ال (Real Part) , ال K عندها تكون أكبر ما يمكن
وأقل ما يمكن

Breaking Point

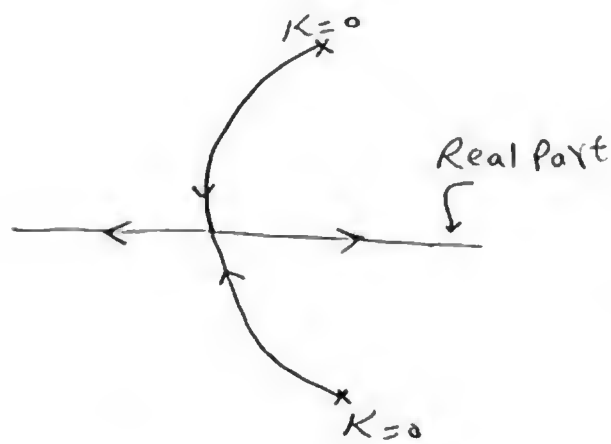
Break away Point

Break in Point
نقطة تلاقى

K_{max}



K_{min}



ch. equation $\quad 1 + GH(s) = 0$

$$\boxed{GH(s) = -1}$$

$$\frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)} = -1$$

$$K = -\left[\frac{s(s+3)(s+4)}{s+1}\right] = -\frac{s^3 + 7s^2 + 12s}{(s+1)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

$$= -\frac{(s+1)(3s^2+14s+12) - (s^3+7s^2+12s)(1)}{(s+1)^2} = 0$$

$$(s+1)(3s^2+14s+12) - (s^3+7s^2+12s) = 0$$

$$s^3 + 5s^2 + 7s + 6 = 0 \Rightarrow s_{1,2,3} = -3.48 \, , \, -0.75 \pm J1.07$$

$-3.48 \leftarrow$ أكثر منطقية .

Breaking Point at $S_b = -3.48$

← نقطة جعلت ال (2-Poles) متساويين .

$$K_b \Big|_{S_b = -3.48} = -\left(\frac{s(s+3)(s+4)}{s+1}\right) = \boxed{0.35}$$

$\boxed{6}$ Lec2

[5] Asymptotes تعتبر خطوط وهمية

→ بتعرف ال (Poles) هيمشي أي إتجاه بعد مايترك ال (real Part)

→ to get it we need

① number of Asymptotes $= n - m = 3 - 1 = 2$

Where $n \rightarrow$ no. of poles

$m \rightarrow$ no. of zeroes

② $$\sigma_c = \frac{\sum \text{Poles} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{(0-3-4)-(-1)}{2} = -3$$

→ center of Asymptotes

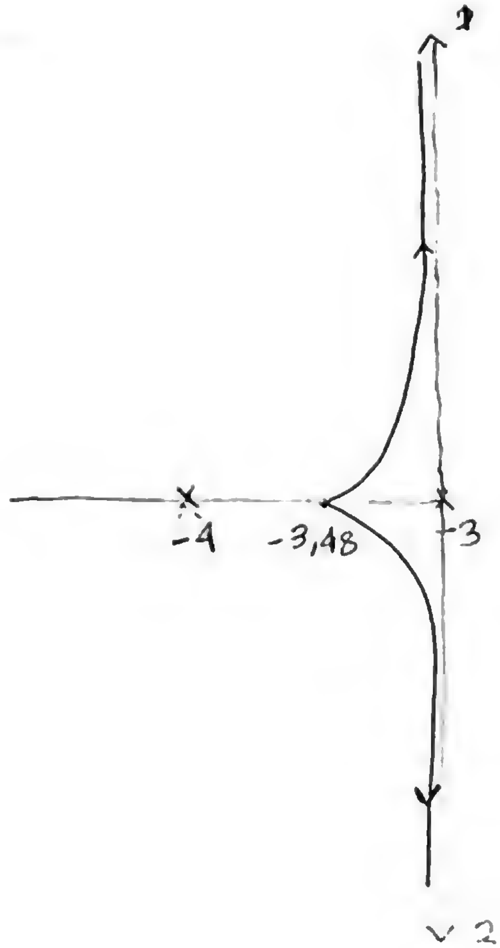
③ $$\theta = \frac{(2L+1)\,180}{n-m}$$ $L = 0, 1, 2, 3, \ldots$

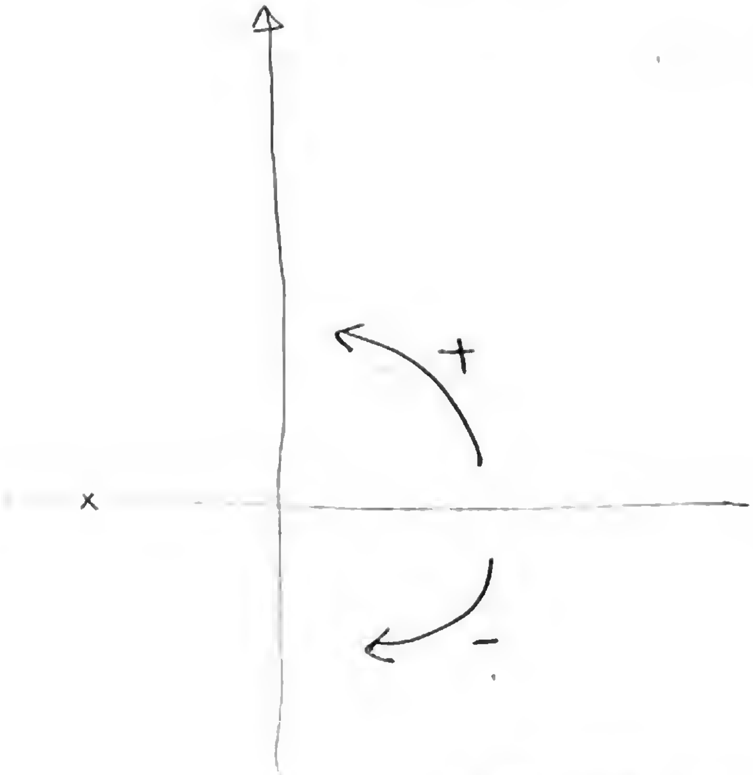
→ على حسب عدد الزوايا اللي محتاجها

→ هنا عندي خطين هحتاج زاويتين

$L = 0 \rightarrow \theta_1 = +90^\circ$

$L = 1 \rightarrow \theta_2 = 270^\circ = -90^\circ$





الـ (Root locus) مرسوم بالأزرق .

~~stable system~~

→ system is stable for all $K > 0$

<u>Check</u> (حاجة إختيارية)

ch. eqn: $1 + G\,H(s) = 0$

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s+4)} = 0$$

$$s(s+3)(s+4) + K(s+1) = 0$$

$\boxed{8}$ Lec2

$$s^3 + 7s^2 + 12s + Ks + K = 0$$

$$s^3 + 7s^2 + (12+K)s + K = 0$$

Routh array

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 12+K \\
s^2 & 7 & K \\
s^1 & \dfrac{7(12+K)-K}{7} > 0 \quad ① & \\
s^0 & K > 0 \quad ② &
\end{array}$$

① $7(12+K) - K > 0$

$84 + 7K - K > 0$

$6K > -84$ $\qquad\qquad K > -14$

② $K > 0$

$\longrightarrow$ range of stability $\boxed{K > 0}$

لا يوجد (Zain) بالسالب . ←

$\boxed{9}$ Lec2

Ex:2 $\quad GH(s) = \dfrac{K}{s(s+2)(s+5)}$

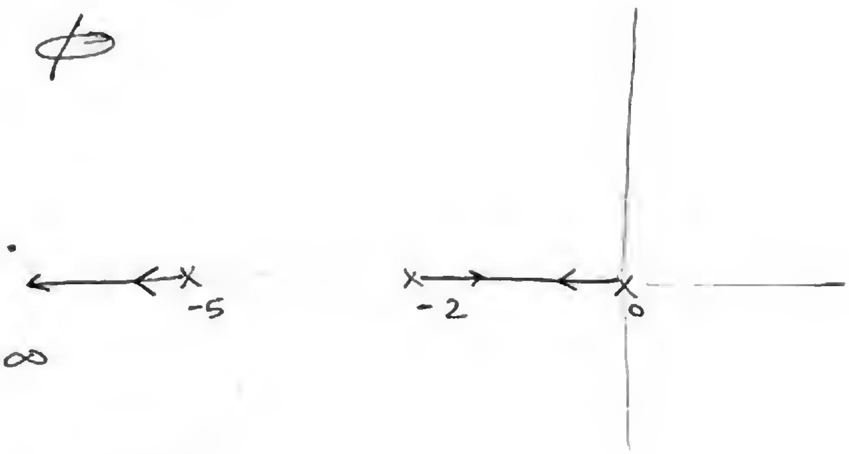
① o.L. Poles $\Rightarrow 0, -2, -5$

o-L-zeros $\Rightarrow \phi$

② s-plane

Poles $\longrightarrow$ X $\;K=0$

Zero $\longrightarrow$ o $\;K=\infty$



Real-Part $\longrightarrow$ بالأزرق

③ Real-Part $\longrightarrow 0 \longrightarrow -2$

$\quad\quad\quad\quad\;\, \longrightarrow -5 \longrightarrow -\infty$

④ Breaking-Point

ch. eqn $\Rightarrow 1 + GH = 0 \Rightarrow GH(s) = -1$

$$\frac{K}{s(s+2)(s+5)} = -1 \Rightarrow K = -\,s(s+2)(s+5)$$

$$s^3 + 7s^2 + 10s$$

$\boxed{10}$ Lec2

$$\frac{dK}{ds} = 0 = -(3s^2 + 14s + 10) = 0$$

$$3s^2 + 14s + 10 = 0$$

$$s_{1,2} = -0.88 \ \& \ -3.78$$

✓   xx

$$s_b = -0.88$$

$$K_b \Big|_{s \to s_b = -0.88} = -(s(s+2)(s+5)) = 4.06$$

$\boxed{5}$ Asymptotes

① no. of Asymptotes $= n - m = 3 - 0 = 3$

② $$\sigma_c = \frac{\sum \text{Poles} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{(0-2-5)-(0)}{3} = \frac{-7}{3}$$

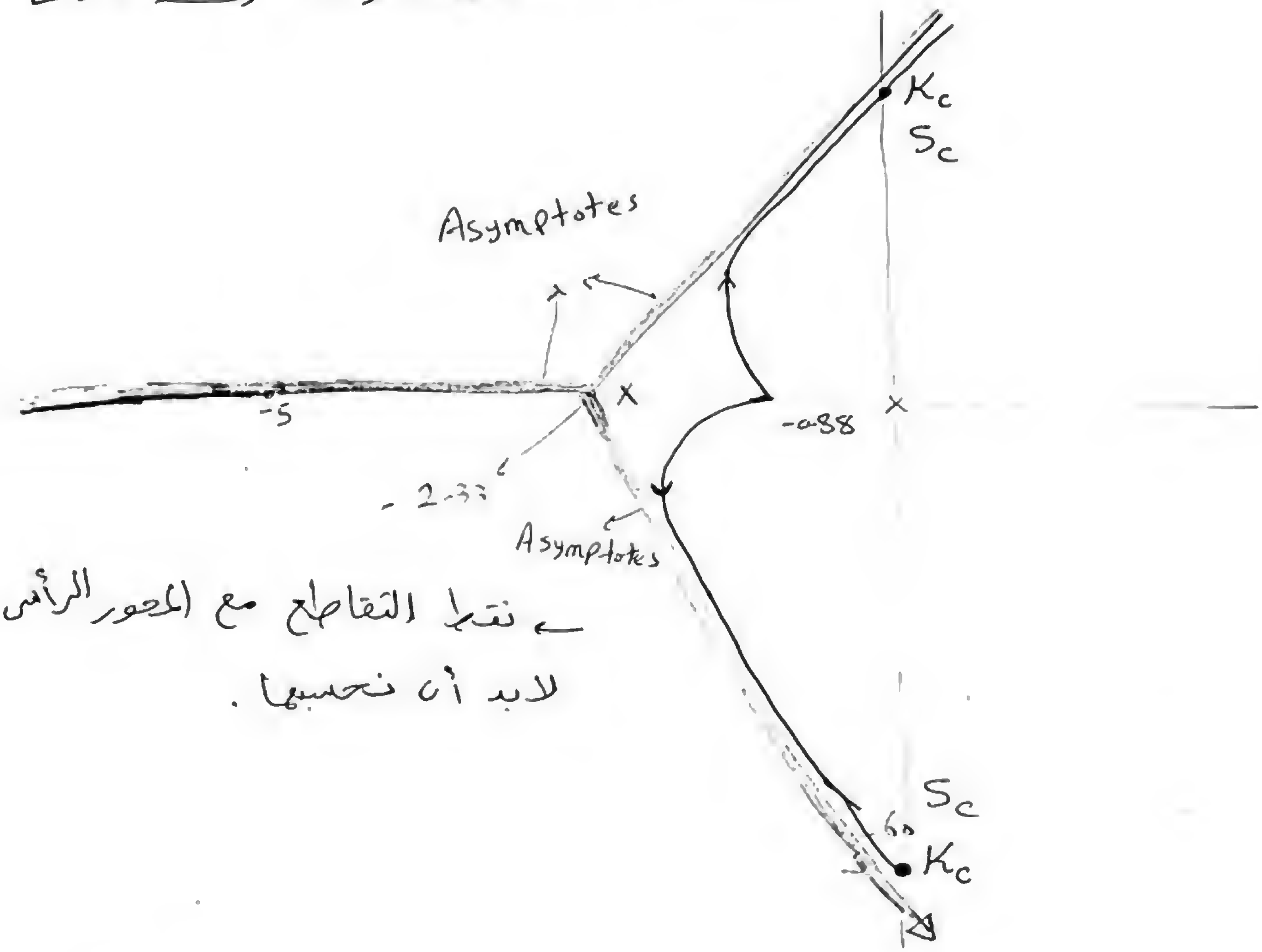
$$\sigma_c = -2.33$$

③ $$\theta = \frac{(2L+1)180}{n-m}$$

$L_1 = 0 \longrightarrow \theta_1 = 60^\circ$

$L = 1 \longrightarrow \theta_2 = 180^\circ$

$L = 2 \longrightarrow \theta_3 = 300^\circ = -60^\circ$



← نقط التقاطع مع المحور الرأسي
لابد أن نحسبها.

6) At imag. axis

ch. eqn $\quad 1 + G H(s) = 0$

$$s(s+2)(s+5) + K = 0$$

$$s^3 + 7s^2 + 10s + K = 0$$

s^3	1	10
s^2	7	K
s^1	$\frac{70-K}{7}$	> 0
s^0	$K > 0$	

ـــ يوجد شرطان وتقاطعهما هو ما يعطي النتيجة

① $\frac{70-K}{7} > 0$

$K > 70$

② $K > 0$

Range of stability

$$\boxed{0 < K < 70}$$

at $K = 70$

The row $s \Rightarrow$ has zero's value

$$\boxed{K_c = 70}$$

جذورها هي الجذور الواقعة على المحور الرأسي.

$$A(s) = 7s^2 + K_c = 0$$

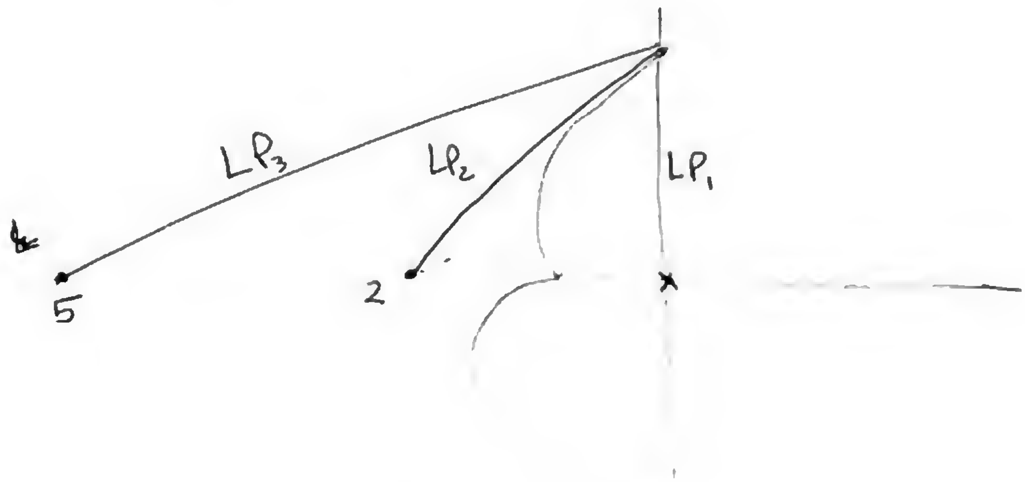
$$7s^2 + 70 = 0 \longrightarrow s^2 = -10$$

$$\boxed{S_c = \pm J\sqrt{10}}$$

K at point S_o located on the root locus:

$$K\Big|_{S_o} = \frac{\prod \text{Poles}}{\prod \text{zeros}}$$

إثبت القانون د (report)
ابدأ بال (ch.eqn)
هو مستنتج منها .



$$K\Big|_{S_o} = \frac{LP_1 * LP_2 * LP_3}{1}$$

EX:3

$$GH(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+2)}$$

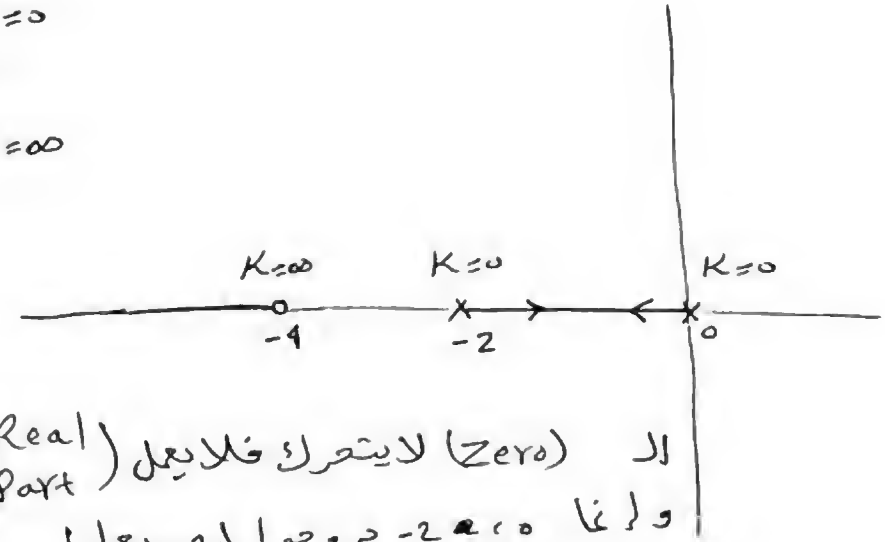
① o.L.Poles $\longrightarrow 0, -2$

o.L.zeros $\longrightarrow -4$

② s-Plane

Pole $\longrightarrow$ $\times$ ($K=0$)

Zero $\longrightarrow$ $\circ$ ($K=\infty$)



Real Part

- $0 \rightarrow -2$
- $-4 \rightarrow -\infty$

ال (Zero) لايتحرك فلا يعمل (Real Part)
ولذا 0 ، -2 يروحوا ليه ويعملوا " .

④ Asymptotes

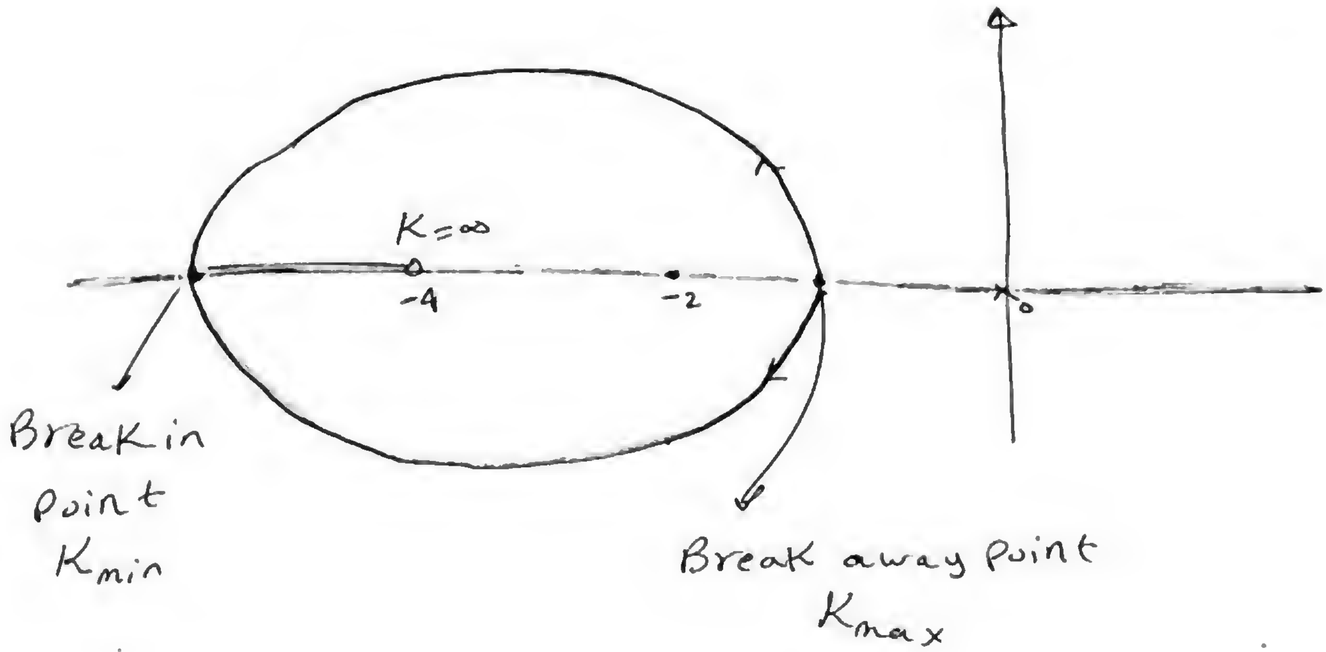
① no. of asy. $= n - m = 2 - 1 = 1$

② $\sigma_c = \dfrac{(0-2) - (-4)}{1} = 2$

③ $\theta = \dfrac{(2L+1)\,180}{n-m}$, $n-m \rightarrow 1$

$L = 0 \rightarrow \theta = 180$

لم أستفيد بشيء من الخطوة دي لأنه الخط عندي بزاوية 180.



← حدث تصادم هنا بسبب وجود الدائرة دي.

← هنجيب K_{max} ، K_{min} ونطرحهم من بعض هنعرف قطر الدائرة.
ونعرف نجيب المركز.

④ Breaking point

ch. eqn $\quad 1 + GH(s) = 0 \Rightarrow GH(s) = -1$

$$\frac{K(s+4)}{s(s+2)} = -1 \Rightarrow K = -\left[\frac{s(s+2)}{s+4}\right]$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow -\left[\frac{(s+4)(2s+2) - (s^2+2s)}{(s+4)^2}\right] = 0$$

$(s+4)(2s+2)-(s^2+2s)=0$

$s^2+8s+8=0$

$S_{1,2} = \underline{-1.17}$ & $\underline{-6.83}$

-1.17 → Break-away point

-6.83 → Break-in point

Breaking point

① $S_{b_1} = -1.17 \Rightarrow K_{S_{b_1}} = 0.34$

② $S_{b_2} = -6.83 \Rightarrow K_{S_{b_2}} = 11.65$

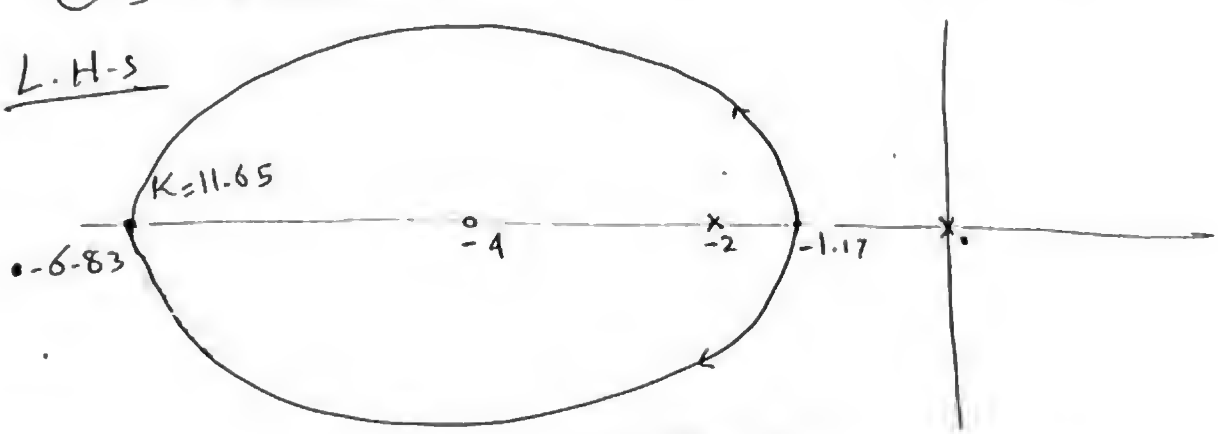
الدائرة

$$r = \frac{6.83 - 1.17}{2} = 2.83$$

مركز الدائرة

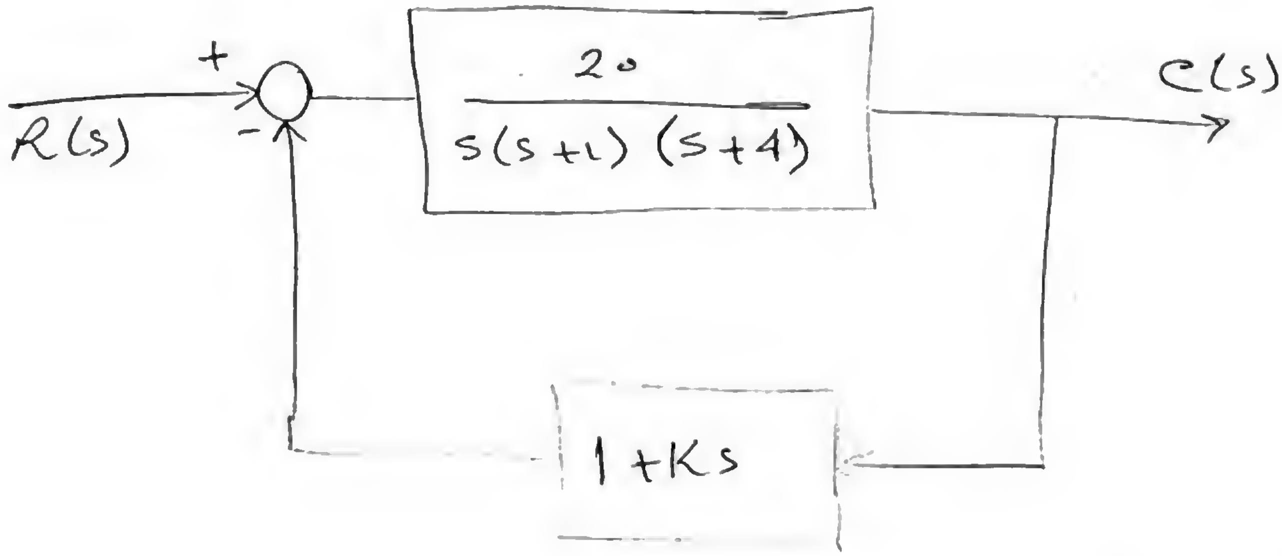
$$c = -2.83 - 1.17 = -4$$

L.H.S



System stable for all K >.

Report



→ sketch the root locus and find the range of K for stability.

$\boxed{18}$ Lec 2

← ملاحظة اذا K لا تتجمع على شيء، اذا تضرب في s .

← نرجع للصورة $1+GH(s)$ ونفصل ما بين K والـ 3 .

$$GH(s) = \frac{(K+3)\,3}{(s+3)(s+2)}$$

نفرض $\tilde{K} = 20K$

$$\text{or} = \frac{20K(s+2)}{(s+4)(s+5)}$$